Observer : ondes et matière — Chapitre 0 : les incertitudes de mesure

Introduction

En sciences expérimentales il n'existe pas de mesures exactes. Les erreurs de mesure peuvent provenir de plusieurs sources:

- qualité des instruments
- l'expérimentateur (l'erreur est humaine !)
- la variabilité de la grandeur mesurée (par exemple une pile de 4,5 V se décharge au cours du temps, la tension qu'elle délivre diminue)

Par conséquent, lors du mesurage d'une grandeur, on évaluera **son incertitude**.

Table des matières

I) mesure et erreurs de mesure

1) le vocabulaire à connaitre

- **Le mesurande M** est la valeur à mesurer (tension, longueur etc)
- **le mesurage** est l'opération permettant de déterminer expérimentalement l'intervalle de valeurs à attribuer à la grandeur mesurée
- **la valeur mesurée** est la valeur attribu ée à un mesurande suite à un mesurage
- **la valeur vraie d'un mesurande** est la valeur obtenue si le mesurage était parfait. Mais c'est impossible ! donc la valeur vraie est toujours inconnue (on ne peut donner qu'un encadrement de sa valeur)!
- **l'erreur de mesure** est l'écart entre la valeur mesurée et la valeur vraie (en toute rigueur cette erreur est inconnue puisque la valeur vraie est inconnue) .

Exemple : un générateur de tension, considéré comme parfait, délivre une tension continue U = 4,5 V. On mesure une valeur de 4,6 V avec un voltmètre. Définir le mesurande, le mesurage, la valeur mesurée, Si on considère la valeur vraie U = 4,5 V, quelle est l'erreur de mesure ?

Réponse :
- le mesurande est la tension électrique
- le mesurage est l'opération consistant à brancher un voltmètre aux bornes de la pile et de lire la valeur affichée.
- la valeur mesurée est de 4,6 V
- l'erreur de mesure est 4,6-4,5 = 0,1 V

Remarque : on ne peut parler que d'estimation de l'erreur de mesure car la valeur vraie est, par définition, inconnue.

On distingue deux types d'erreur de mesure :
- **l'erreur de mesure aléatoire**
- **l'erreur de mesure systématique**

2) l'erreur de mesure aléatoire

Un opérateur effectue plusieurs fois la même mesure par exemple la mesure de la tension aux bornes d'un générateur. Les valeurs mesurées 'm' peuvent être différentes m_1 = 4,55 V, m_2 = 4,54 V, m_3 = 4,52 V , m_4 = 4,48 V. On parle alors **d'erreur aléatoire Er_A**.

Si on effectue un nombre infini de mesurage, le meilleur estimateur de la valeur du mesurande est la **moyenne** m(moy) des valeurs mesurées (on associe à la valeur vraie la valeur moyenne). L'erreur aléatoire Er_A d'une mesure est alors égale à la différence entre la valeur mesurée et la valeur moyenne:

$$Er_a = m - m(moy)$$

Les erreurs de mesures systématiques proviennent généralement d'un **appareil mal étalonné**.
En pratique on ne peut effectuer un nombre infini de mesure. Il est uniquement possible de déterminer une **estimation de l'erreur aléatoire**.

Exercice : calculer l'erreur aléatoire commise sur la valeur de la tension m_1.

Réponse :
on calcule la moyenne m(moy)
m(moy) = (U1+U2+U3+U4)/4 = 4,52 V
l'erreur aléatoire vaut :

Er_A = m – m(moy) = 4,55-4,52 = 0,03 V

3) l'erreur de mesure systématique

L'erreur de mesure systématique se produit lorque l'appareillage utilisé pour le mesurage est deffectueux. Toutes les mesures 'm' effectuées seront éloignées de la valeur vraie du mesurande.

L'erreur systématique est égale à la différence entre la valeur moyenne des mesures m(moy) et la valeur vraie m(vrai) : **Er_S = m(moy) – m(vrai)**.

Remarque : la valeur vraie étant par définition inconnue on ne pourra faire qu'une estimation de l'erreur systématique.

Exemple : on utilise un voltmètre de mauvaise qualité pour mesurer la tension du générateur de l'exercice précédent. On trouve les valeurs suivantes :
m'_1 = 4,76 V ; m'_2 = 4,82 V ; m'_3 = 4,89 V ; m'_4 = 4,80 V.
En considérant la valeur vrai m(vrai) comme la moyenne des valeurs obtenues avec le premier voltmètre considéré comme parfait, calculer l'erreur systématique du voltmètre de mauvaise qualité. Calculer l'erreur aléatoire effectué sur la mesure m'_1.

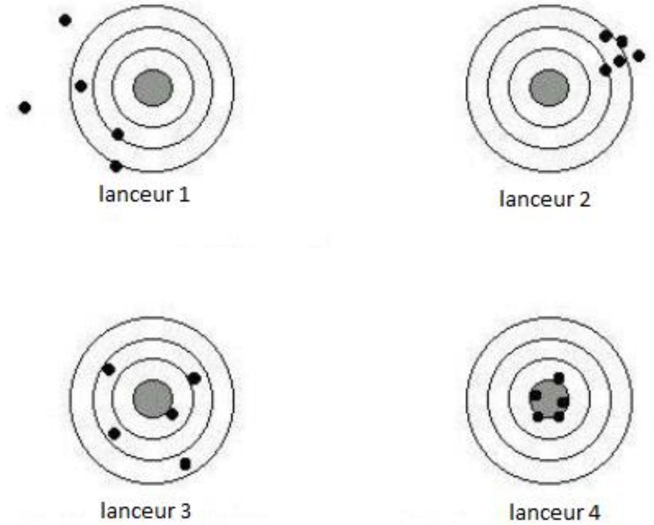
Réponse :
m(vrai) = 4,52 V (valeur moyenne obtenue avec le voltmètre de précision)
La valeur moyenne des mesures obtenue avec le voltmètre de mauvaise qualité vaut :
m(moy) = (m'1 +m'2 +m'3 +m'4)/4 = 4,81 V
L'erreur systématique vaut :
Er_S = m(moy) – m(vrai) = 4,81 – 4,52 = 0,29 V
L'erreur aléatoire sur la mesure m'1 vaut :
Er_A = m'1-m(moy) = 4,76-4,81 = -0,05 V

L'erreur systématique est la composante de l'erreur de mesure qui reste constante ou varie de façon prévisible (défaut d'étalonnage, réglage de zéro, dérive temporelle, temps de réponse, erreur de parallaxe, erreur d'échantillonnage, approximation injustifiée, perturbation due à l'instrument, grandeurs d'influence…). Elle ne peut pas être réduite en augmentant le nombre de mesurages.

La justesse est l'aptitude d'un instrument à donner des indications exemptes d'erreurs systématiques. **La fidélité** d'un appareil de mesure est son aptitude à donner un résultat avec une **faible erreur aléatoire**.

Exercice: soit 4 lanceurs automatique de fléchette qui projettent chacun 5 fléches dans une cible. Considérons la valeur vraie m(vraie) au centre de la cible.

1) Evaluer l'importance de l'erreur systématique et aléatoire commise par chacun des lanceurs.



Qualifier chaque lanceur automatique avec les termes suivants **juste et fidèle.**

Réponse :
Le lanceur 1 commet une erreur systématique importante car tous les impacts sont situés dans une même zone éloignée de la cible. De plus, chaque lancer comporte une erreur aléaoire importante car les impacts sont éloignés les uns des autres. Le premier lanceur n'est pas juste et peu fidèle (l'appareil est sans doute de mauvaise qualité et n'est pas bien étalonnée)

Le lanceur 2 commet une erreur systématique importante car tous les impacts sont situés dans une même zone éloignée de la cible. Chaque lancer comporte une erreur aléaoire faible car les impacts sont peu éloignés les uns des autres. Le second lanceur n'est pas juste mais il est fidèle.

Le lanceur 3 commet une erreur systématique faible car tous les impacts sont situés autour du centre de la cible. De plus, chaque lancer comporte une erreur aléatoire importante car les impacts sont éloignés les uns des autres. Le premier lanceur est juste mais peu fidèle.

Le lanceur 4 commet une erreur systématique faible car tous les impacts sont situés autour de centre de la cible (valeur supposée vrai) . De plus, chaque lancer comporte une erreur aléaoire faible car les impacts sont peu éloignés les uns des autres. Le premier lanceur est juste et fidèle (l'appareil, bien étalonné, est sans doute de bonne qualité)

4) Comment calculer l'erreur de mesure ?

L'erreur de mesure Er est égal à la différence entre la valeur mesurée 'm' et la valeur vrai m(vrai) :
Er = m – m(vrai) = m –m(moy) + m(moy)- m(vrai)
Par conséquent l'erreur de mesure est égale à la somme

de l'erreur aléatoire et systématique.

$$Er = Er_a + Er_s$$

Remarque : des appareils mal étalonnés mais de bonne qualité donnent des erreurs aléatoires faibles mais une erreur systématique importante.
Considérons l'appareil de mauvaise qualité. Quelle est la valeur de l'erreur de mesure Er effectué au cours de la mesure m'_4 = 4,80 V ?

Réponse :
L'erreur aléatoire sur la mesure vaut :
$Er_A = m'_4 - m(moy) = 4{,}80 - 4{,}81 = -0{,}01$ V
L'erreur systématique de l'appareil vaut :
$Er_S = 0{,}29$ V
L'erreur de mesure est la somme des deux erreurs :
$Er = Er_A + Er_S = 0{,}29 - 0{,}01 = 0{,}28$ V

II) incertitude de mesure

1) incertitude de mesure absolue et intervalle de confiance

L'incertitude de mesure absolue (ou incertitude de mesure**) notée U** (de l'anglais uncertainly) est une valeur associée au résultat d'un mesurage.
L'incertitude de mesure donne une indication de la dispersion des mesures. Elle correspond à l'intervalle contenant très probablement la valeur vraie de la grandeur mesurée. Elle se note **U(M)** et possède la même unité que la grandeur M.

L'intervalle de confiance est centré sur la valeur m mesurée lors d'une mesure unique (ou la moyenne des valeurs mesurées lors d'une série de mesure) et a pour demi-largeur l'incertitude de mesure U(M).

L'intervalle de confiance est un intervalle dans lequel la valeur vraie a de grandes chances de se trouver. En général, la largeur de cet intervalle est choisie avec **un niveau de confiance de 95 %** (la probabilité de présence de la valeur vraie dans l'intervalle de confiance est de 95%) **ou 99 %** .

2) convention d'écriture pour l'expression du résultat

- Le **dernier chiffre significatif** de la valeur mesurée, doit d'être à la **même position** décimale que le **dernier chiffre significatif** de **l'incertitude.**
Exemple : i =24,36 mA ; U(i) = 0,02 mA
(U(i) = 0,023 mA aberrant!)
- l'incertitude sera arrondie à la valeur supérieure avec **au plus 2 chiffres significatifs**.
Exemple :
U(i) = 0,343 mA sera arrondie à U(i) = 0,35 mA
Le résultat du mesurage s'écrit :

$$M = m \pm U(M)$$

M **appartient à l'intervalle de confiance** [m – U (M) ; m + U (M)].

Exemple 1: q = 1,6042x10^{-19} C ; U(q) = 0,0523x10^{-19} C
Résultat du mesurage : q = (1,604 +/- 0,053) x10^{-19} C

.**Exemple 2:** écrire le résultat du mesurage si la mesure d'une intensité de courant avec un niveau de confiance de 95 % est i = 5,52 mA et que l'incertitude sur i vaut U(i) = 0,356 mA.
i = 5,52 mA +/- 0,36 mA
La valeur mesurée est 5,52 mA ; la valeur vraie de l'intensité du courant est comprise dans l'intervalle de confiance : [m – U (M) ; m + U (M)]
[5,52 - 0,36 = 5,16 mA ; 5,52 + 0,36 = 5,88 mA] avec une probabilité de 95%

3) l'incertitude de mesure relative

L'incertitude relative est le rapport sans dimension :

U(M)/m

On la donne souvent en %.

Exercice : une série de 10 mesures de pH d'une solution donne un pH (moyen) = 4,8. L'incertitude de mesure avec un niveau de confiance de 95% est U (pH) = 0,2.
L'incertitude de mesure avec un intervalle de confiance de 99% est U' (pH) = 0,3.
Ecrire en l'explicitant : le résultat du mesurage, l'incertitude absolue et l'incertitude relative dans chacun des cas.

Réponse :
1) Expression du mesurage : pH = 4,8 +/- 0,2
Ce qui signifie que la valeur vraie du pH de la solution est comprise dans l'intervalle de confiance [m – U (M) = 4,8 – 0,2 = 4,6 ; m + U (M) = 4,8 + 0,2 = 5,0] et ceci avec une probabilité (niveau de confiance) de 95 %
L'incertitude absolue est U (pH) = 0,2
L'incertitude relative est U (pH)/pH = 0,2/4,8 = 4,2 %

2) Résultat du mesurage : pH = 4,8 +/- 0,3
Ce qui signifie que la valeur vraie du pH de la solution est comprise dans l'intervalle de confiance [m – U (M) = 4,8 – 0,3 = 4,5 ; m + U (M) = 4,8 + 0,3 = 5,1] et ceci avec une probabilité (niveau de confiance) de 99 %
L'incertitude absolue est U' (pH) = 0,3
L'incertitude relative est U' (pH)/pH = 0,3/4,8 = 6,2 %

III) les 2 types d'incertitude de mesure

Il existe 2 types d'incertitude de mesure :

- **l'incertitude de mesure de type A** évaluée avec des **méthodes statistiques** correspondant **à une série de mesure**

- **l'incertitude de type B** évaluée avec d'autres méhodes correspondant généralement à une **mesure unique**.

1) quelques définitions de statistique

La population est l'ensemble des mesures possibles (elle est souvent infinie). **L'échantillon** est l'ensemble des mesures effectuées, à partir duquel on espère tirer des informations sur la population (l'échantillon doit être représentatif de la population).

La moyenne m (moy) (ou espérance mathématique) d'un échantillon de 'n' mesures est donné par la formule :

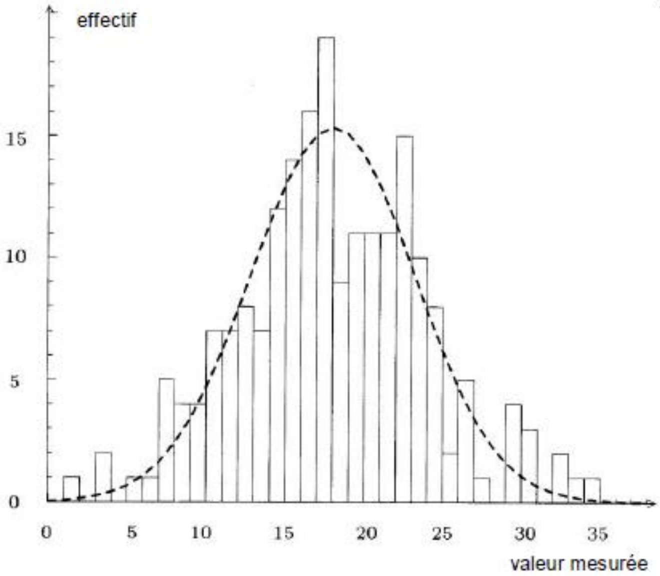
$$m(moy) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} m_i$$

L'écart-type expérimental σ_{n-1} est égal à :

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(m_i - m(moy))^2}{n-1}}$$

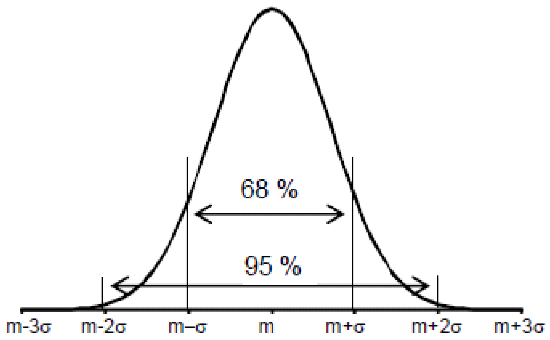
Remarque : on divise par n-1 et non n pour éviter les erreurs de calcul sur l'écart type.

Théorème central limite (Gauss : 1777-1855) :
Lorsque les causes d'incertitudes sont nombreuses, indépendantes, et donnent des erreurs du même ordre de grandeur, l'histogramme de répartition de la série de mesures tend vers une courbe de Gauss lorsque le nombre n de mesures tend vers l'infini.



La loi normale n'est caractérisée que par deux paramètres m et σ appelés respectivement moyenne (indiquant la valeur centrale) et écart-type (indiquant la largeur de la courbe).

Si la variable X suit une loi normale, 68 % des valeurs de X sont comprises dans l'intervalle [m(moy)-σ ; m(moy)+σ], et 95 % des valeurs sont comprises dans l'intervalle [m(moy)-2σ ; m(moy)+2σ].



Le calcul d'incertitudes consiste à estimer, en supposant que la distribution est gaussienne, sa moyenne et son écart-type à partir des résultats d'une série de mesures. La valeur recherchée (valeur conventionnellement vraie) est estimée par la moyenne des résultats à condition que le processus de mesure soit exempt d'erreurs systématiques.

2) incertitude de type A

L'incertitude de type A est évaluée lorsque :

- **un même manipulateur réalise plusieurs fois le mesurage** d'un même mesurande M dans les mêmes conditions expérimentales
- ou **plusieurs manipulateurs réalisent simultanément la même mesure** avec du matériel similaire (mesure de pH d'une solution par plusieurs binômes de TP par exemple).

L'écart type σ_{n-1} permet d'évaluer l'incertitude type u(M).

Pour 'n' mesures l'incertitude type u(M) vaut :

$$u(M) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

L'incertitude élargie appelée incertitude de répétabilité U(M) est égale au produit de **l'incertitude type u(M)** par un facteur k appelé **facteur d'élargissement :**

$$\mathrm{U(M)} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{u(M)} = k.\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Le coefficient d'élargissement k dépend de :
- du niveau de confiance (95% ou 99%)
- du nombre n de mesures

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_{95\ \%}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26
$k_{99\ \%}$	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25

Le résultat du mesurage s'écrit :

M = m(moy) ± U (M)

La valeur vraie M **appartient à l'intervalle de confiance** [m(moy) – U (M) ; m(moy) + U (M)].

Exemple : on effectue n = 10 mesures de tension aux bornes d'une pile, l'écart type expérimentale vaut σ_{n-1} =

0,15 V, la moyenne des mesures m(moy) = 4,20 V. Pour un niveau de confiance de 95%, quel est le résultat du mesurage ainsi que l'intervalle de confiance ?

Réponse :
L'incertitude de répétabilité U(M) vaut :

$$\mathrm{U(M)} = \mathrm{k} \cdot \mathrm{u(M)} = k.\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = 2{,}26.\frac{0{,}15}{\sqrt{10}} = 0{,}11V$$

Résultat du mesurage : M = m(moy) ± U (M) :
4,20 V +/- 0,11 V
La valeur vraie de la tension aux bornes de la pile à une probabilité de 95% de se trouver dans l'intervalle de confiance suivant :
[m(moy) – U (M) ; m(moy) + U (M)]
[4,20-0,11 = 4,09 V ; 4,20+0,11 = 4,31 V]

3) incertitude de type B

L'évaluation d'une incertitude de type B s'effectue lors d'une **mesure unique**.
On cherchera à évaluer l'incertitude du à la précision de chaque l'appareil comme :
- la résolution (graduation ou digit) qui correspond à l'incertitude de lecture
- la tolérance du constructeur
- l'incertitude de l'étalon
- les grandeurs ayant une influence sur la mesure (température, hygrométrie…)

Pour les incertitudes de type B, on utilise l'incertitude élargie :

U = k · u

Pour un niveau de confiance de 95 %, le facteur d'élargissement est k = 2 ; pour 99 % k = 3.

4) exemple d'incertitude de type B

1) incertitude de lecture : lors d'une mesure par lecture sur une échelle ou un cadran, **l'incertitude-type de lecture** est donnée par la formule :

$$u_{lecture} = \frac{1\,graduation}{\sqrt{12}}$$

Exemple : un thermomètre est gradué en degré Celsius (1 graduation correspond à 1 degré Celsius). Evaluer l'incertitude élargie de lecture U pour un niveau de confiance de 99%.

Réponse :

$$U = k.u_{lecture} = k.\frac{1\,graduation}{\sqrt{12}}$$

$$U = 3x\frac{1}{\sqrt{12}} = 0{,}87°C$$

2) incertitude liée à la tolérance t d'un appareil : l'incertitude type est donnée par la relation :

$$u_{tolérance} = \frac{t}{\sqrt{3}}$$

Exemple : une fiole jaugée de 50 mL à une tolérance t de +/- 0,1 mL. Calculer l'incertitude élargie U liée à la tolérance de la fiole avec un niveau de confiance de 95%.

Réponse :

$$U = k.u_{tolérance} = k.\frac{t}{\sqrt{3}}$$

$$U = 2x\frac{0{,}1}{\sqrt{3}} = 0{,}12\text{ mL}$$

3) incertitude liée à la précision d'un appareil à affichage numérique : la notice de l'appareil indique généralement **la précision *p*** correspondant à un pourcentage de la valeur lue sur l'écran et par un certain nombre de digit (plus petite valeur possible affichée).
L'incertitude-type liée à la précision de cet appareil est :

$$u_{précision} = \frac{p}{\sqrt{3}}$$

Exemple : un voltmètre à une précision de 2% + 1 digit. Il affiche la valeur 2,34 V. Calculer l'incertitude élargie relative à la précision de l'appareil correspondant à un niveau de confiance de 99%. Quel est l'intervalle de confiance ? Le résultat du mesurage ?

Réponse :

$$U = k.u_{précision} = k.\frac{p}{\sqrt{3}}$$

$$U = 3x(\frac{\frac{2}{100}x2{,}34 + 0{,}01}{\sqrt{3}}) \approx 0{,}10\ \ V$$

Résultat du mesurage :
U =2,34 V +/- 0,10 V
Intervalle de confiance :
[m – U (M) ; m + U (M)] =
[2,34-0,10 = 2,24 V ;2,34+0,10 = 2,44 V].

5) incertitude calculée à partir de plusieurs sources d'erreurs

Lorsque la valeur A d'une grandeur est calculée à partir de plusieurs valeurs mesurées B et C il faut faire intervenir dans la formule de l'incertitude sur A, U(A) les incertitudes U(B) et U(C). La formule est toujours donnée dans les exercices.

Exemple : le rayon de la trajectoire de la Terre autour du soleil est R = (6,40 +/- 0,05) x10^3km
Sa période de révolution autour du soleil vaut T =(84,60 +/- 0,04)x10^3 s
1) Calculer le rapport r = T^2/R^3 ($s^2.m^{-3}$)
2) Calculer l'incertitude U(r) sachant que :

$$U(r) = r.\sqrt{4.(\frac{U(T)}{T})^2 + 9.(\frac{U(R)}{R})^2}$$

3) un encadrement de la valeur de r. Ecrire le résultat du mesurage puis un encadrement de la valeur de r (intervalle de confiance)

Réponse :

1) $r = T^2/R^3$

$$r = \frac{(84{,}60x10^3)^2}{(6{,}40x10^6)^3} = 2{,}73x10^{-11}s^2.m^{-3}$$

$$U(r) = r.\sqrt{4.(\frac{U(T)}{T})^2 + 9.(\frac{U(R)}{R})^2}$$

2) $U(r) = 2{,}73x10^{-11}.\sqrt{4.(\frac{0{,}04}{84{,}60})^2 + 9.(\frac{0{,}05}{6{,}40})^2}$

3) Encadrement de la valeur de 'r' :
[r – U (r) ; r + U (r)]

Notions et contenus	**Compétences expérimentales exigibles**
Erreurs et notions associées	Identifier les différentes sources d'erreur (de limites à la précision) lors d'une mesure : variabilités du phénomène et de l'acte de mesure (facteurs liés à l'opérateur, aux instruments, etc.).
Incertitudes et notions associées	Évaluer et comparer les incertitudes associées à chaque source d'erreur. Évaluer l'incertitude de répétabilité à l'aide d'une formule d'évaluation fournie. Évaluer l'incertitude d'une mesure unique obtenue à l'aide d'un instrument de mesure. Évaluer, à l'aide d'une formule fournie, l'incertitude d'une mesure obtenue lors de la réalisation d'un protocole dans lequel interviennent plusieurs sources d'erreurs.
Expression et acceptabilité du résultat	Maîtriser l'usage des chiffres significatifs et l'écriture scientifique. Associer l'incertitude à cette écriture. Exprimer le résultat d'une opération de mesure par une valeur issue éventuellement d'une moyenne et une incertitude de mesure associée à un niveau de confiance. Évaluer la précision relative. Déterminer les mesures à conserver en fonction d'un critère donné.
	Commenter le résultat d'une opération de mesure en le comparant à une