COMPRENDRE
Lois et modèles

chapitre 5: cinématique et dynamique newtoniennes

Animation
1. déterminer les coordonnées d'un vecteur position
2. vitesse position et accélération en fonction du temps (mouvement rectiligne) par Walter Fendt.
3. tracé d'un vecteur vitesse
tracé d'un vecteur variation de vitesse puis d'un vecteur accélération
4. le pendule simple sur différentes planètes
5. table à coussin d'air
6. chute verticale avec frottement (f(t), v(t), a(t) (Gastebois)
7. mouvement des planètes telluriques autour du soleil **(Gastebois)**

Table de matières

I) Cinématique

Introduction: En physique, la cinématique est la discipline de la mécanique qui étudie le mouvement des systèmes matériels. On étudiera des systèmes de petites dimensions assimilés à un point (système ponctuel). Le mouvement d'un objet, représentant le système, est défini par :

a) **le référentiel d'étude** auquel on associe une horloge pour le repérage du temps.

Un référentiel d'étude est composé d'un solide par rapport auquel on étudie le mouvement du système matériel. **Le repère** lié au référentiel est constitué de trois vecteurs unitaires orthogonaux et d'un point origine O. Exemple le repère cartésien R orthonormé: $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

b) **sa trajectoire** qui correspond à l'ensemble de ses positions successives au cours du temps.

c) son vecteur vitesse en chaque instant

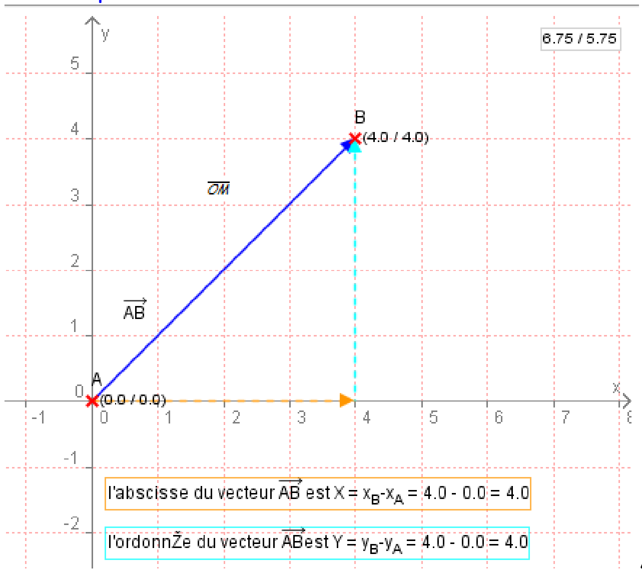
d) son vecteur accélération en chaque instant

1) le vecteur position

En terminale on se limitera à un vecteur position dans un repère à deux dimensions. Le système ponctuel est assimilé au point M. Dans le repère cartésien $R(O, \vec{i}, \vec{j})$, Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est: $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

x et y sont les coordonnées du vecteur position dans le repère R cartésien orthonormé. Unité légale : **le mètre (m).**

Exemple: Animation: déterminer les coordonnées d'un vecteur position



À l'instant t, le point B représentant le système ponctuel à pour coordonnées (x_B = 4 m; y_B = 4 m). Le point origine du repère, noté A sur l'animation, à pour coordonnée (x_A = O m; y_A = O m). Le vecteur position $\overrightarrow{AB}$ du système est:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A).\vec{i} + (y_B - y_A).\vec{j}$$
$$\overrightarrow{AB} = (x_B).\vec{i} + (y_B).\vec{j}$$
$$\overrightarrow{AB} = 4.\vec{i} + 4.\vec{j}$$

2) le vecteur vitesse

Dans un référentiel donné, **le vecteur vitesse instantanée** à l'instant t d'un point M du **système,** noté $\vec{v}(t)$, est égale à la **dérivée** du **vecteur position** $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps:

$$\vec{v}(t) = d(\frac{\overrightarrow{OM}}{dt})_t$$
$$\vec{v}(t) = d(\frac{x.\vec{i} + y.\vec{j}}{dt})_t = (\frac{dx}{dt}).\vec{i} + (\frac{dy}{dt}).\vec{j}$$
$$\vec{v}(t) = v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j}$$

v_x et v_y sont les coordonnées du vecteur vitesse dans le repère cartésien orthonormé R. Unité légale: **le mètre par seconde ($m.s^{-1}$).**

Le **vecteur vitesse moyenne** est égale à la variation du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ divisée par la durée Δ t du parcourt:

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

Δ : représente une grande variation alors que 'd' représente une petite variation.

On assimile le vecteur vitesse moyenne au vecteur vitesse instantanée quand la valeur Δ **tend vers 0**:

$$\vec{v}(t) = d(\frac{\overrightarrow{OM}}{dt})_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

Exemple: si v_x =2,0 m.s^{-1} et v_y = 4,0 m.s^{-1} cela signifie que le solide se déplace avec une vitesse de 2 m.s^{-1} sur l'axe des x et de 4 m.s^{-1} sur l'axe des y. La valeur ou norme de la vitesse sera:

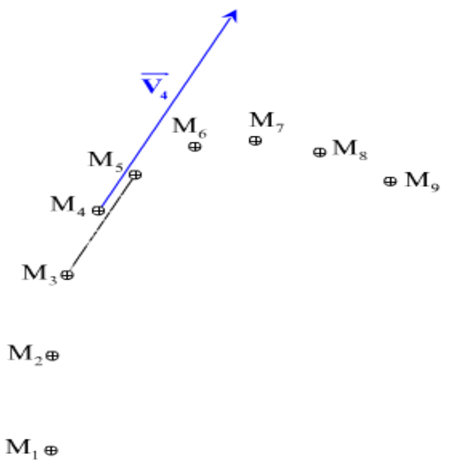
$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = \sqrt{2{,}0^2 + 4{,}0^2} = 4{,}5\ m s^{-1}$$

Les caractéristiques du vecteur vitesse au point M sont:

$$\vec{v}(t)\left|\begin{array}{l}\text{direction : une droite tangente à la trajectoire}\\ \text{au point } M\\ \text{sens : celui du mouvement}\\ \text{point d'application : le point } M\\ \text{une valeur } v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}\\ \text{l'unité légale est le mètre par seconde } (m\,s^{-1})\end{array}\right.$$

Exemple: vecteur vitesse d'un point M mobile à l'instant t_4:

$$\vec{v}_4(t_4)\left|\begin{array}{l}\text{direction : une droite tangente à la trajectoire}\\ \text{au point } M_4\\ \text{sens : celui du mouvement}\\ \text{point d'application : le point } M_4\\ \text{une valeur } v_4 = \|\vec{v}_4\| = \sqrt{v_{x4}{}^2 + v_{y4}{}^2} = 10\,m s^{-1}\end{array}\right.$$



Pour représenter le vecteur vitesse on utilisera **une échelle**
Par exemple 1 cm représente 2 m.s^{-1}

Méthode pour tracer le vecteur vitesse instantanée

Animation: tracer un vecteur vitesse (attention il y a une erreur dans le calcul de la longueur du vecteur vitesse)

Le vecteur vitesse à l'instant t_i est:

$$\vec{v}_i = \frac{\overrightarrow{M_{i+1}M_{i-1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

On désire tracer le vecteur vitesse $\vec{v}_5$ à l'instant t_5:

$$\vec{v}_5 = \frac{\overrightarrow{M_4M_6}}{t_6 - t_4}$$

1. calculer la norme de la vitesse v_5. Mesurer la distance M_4M_6 puis diviser par la durée t_6-t_4.

$$v_5 = \frac{M_4M_6}{t_6 - t_4} = 0{,}85\,m s^{-1}$$

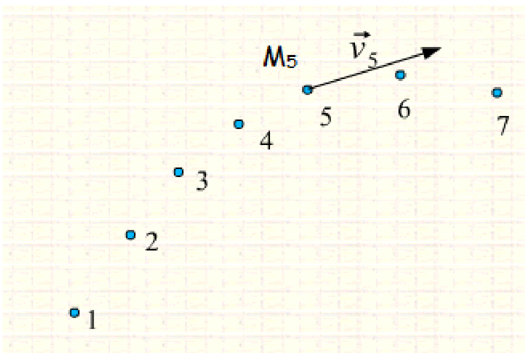
2. Tracer la corde M_4M_6. Tracer une parallèle à la corde passant par M_5. Cette parallèle est la tangente à la courbe à l'instant t_5. C'est la direction du vecteur vitesse

3. Choisir une échelle de vitesse par exemple 1cm <-> 0,30 m.s^{-1}. En déduire la longueur du vecteur vitesse:

$$1\text{cm} \quad \leftrightarrow \quad 0{,}30\ m s^{-1}$$

$$L(\vec{v}_5) = \frac{0{,}85 \text{x} 1}{0{,}30} = 2{,}8\,\text{cm} \quad \leftrightarrow \quad v_5 = 0{,}85\,m s^{-1}$$

4. Tracer le vecteur vitesse qui a pour origine le point M_5, le sens celui du mouvement, une longueur de 2,8 cm, une direction la tangente à la trajectoire au point M_5.



3) le vecteur accélération

Dans un référentiel donné, le **vecteur accélération** instantanée à l'instant t d'un point M du **système**, noté $\vec{a}(t)$, est égale à la **dérivée** du **vecteur vitesse instantanée** $\vec{v}(t)$ par rapport au temps:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_t$$

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d(v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j})}{dt}\right)_t = \left(\frac{dv_x}{dt}\right).\vec{i} + \left(\frac{dv_y}{dt}\right).\vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = a_x.\vec{i} + a_y.\vec{j}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

a_x et a_y sont **les coordonnées** du vecteur vitesse dans le repère cartésien orthonormé R. **Unité légale**: le mètre par seconde au carré (**m.s**$^{-2}$).
a_x est la **dérivée première** par rapport au temps de la coordonnée de la **vitesse v_x** sur l'axe des x; c'est la **dérivée seconde** par rapport au temps de **l'abscisse x**.
a_y est la **dérivée première** par rapport au temps de la coordonnée de la **vitesse v_y** sur l'axe des y; c'est la **dérivée seconde** par rapport au temps de **l'ordonnée y**.

Exemple 1: si a_x =2,0 m.s^{-2} et v_y = 4,0 m.s^{-2} cela signifie que le solide voit sa vitesse varier de 2 m.s^{-1} en une seconde sur l'axe des x et de 4 m.s^{-1} en une seconde sur l'axe des y. La valeur ou norme de l'accélération sera:

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{2{,}0^2 + 4{,}0^2} = 4{,}5\ \text{ms}^{-2}$$

Exemple 2: animation donnant vitesse position et accélération en fonction du temps (mouvement rectiligne) par Walter Fendt.

Les caractéristiques du vecteur accélération au point M sont:

$$\vec{a}(t)\left|\begin{array}{l}\text{direction : identique à celle du vecteur variation de} \\ \text{vitesse } d\vec{v} \\ \text{sens : celui du vecteur variation de vitesse } d\vec{v} \\ \text{point d'application : le point } M \\ \text{une valeur } a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} \text{ l'unité légale est} \\ \text{ le mètre par seconde au carré } (m.s^{-2})\end{array}\right.$$

Méthode pour tracer le vecteur accélération instantanée.

Tracé d'un vecteur variation de vitesse puis d'un vecteur accélération réalisée par L. Germain.

Le vecteur accélération à l'instant t_i est:

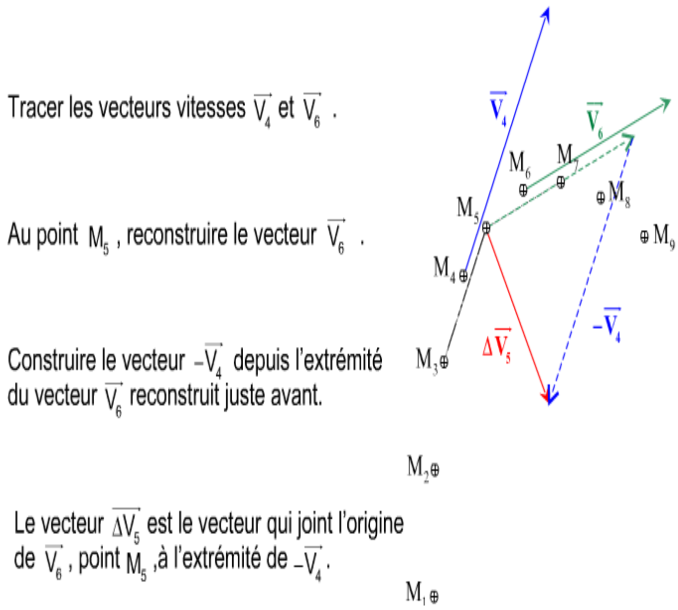
$$\vec{a}_i = \frac{\overrightarrow{v_{i+1}} - \overrightarrow{v_{i-1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

On désire tracer le vecteur accélération $\vec{a}_5$ à l'instant t_5:

$$\vec{a}_5 = \frac{\vec{v}_6 - \vec{v}_4}{t_6 - t_4}$$

1. Tracer les vecteurs $\vec{v_6}$ *et* $\vec{v_4}$ puis le vecteur variation de vitesse $\vec{v_6} - \vec{v_4}$

2. Mesurer la longueur du vecteur $\vec{v_6} - \vec{v_4}$ et déterminer sa norme $\|\vec{v_6} - \vec{v_4}\|$ grâce à l'échelle de vitesse.



3. Calculer la norme du vecteur accélération grâce à la formule:

$$\|\vec{a}_5\| = \frac{\|\vec{v}_6 - \vec{v}_4\|}{t_6 - t_4} = 2{,}0\text{m.s}^{-2}$$

4. Choisir une échelle d'accélération par exemple 1,0 cm <-> 1,0 m.s^2. En déduire la longueur du vecteur accélération:

$$1{,}0\text{cm} \leftrightarrow 1{,}0\ \text{ms}^{-1}$$
$$L(\vec{a}_5) = \frac{2{,}0 \times 1}{1{,}0} = 2{,}0\ \text{cm} \leftrightarrow a_5 = 2{,}0\ \text{m.s}^{-1}$$

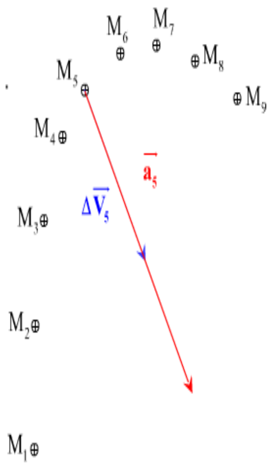
4. Tracer le vecteur accélération qui a pour origine le point M_5, le sens celui du mouvement, une longueur de 2,0 cm, une direction celle du vecteur variation de vitesse $\vec{v_6} - \vec{v_4}$.

Mesurer la longueur du vecteur $\overrightarrow{\Delta V_5}$ et calculer sa valeur $\left\|\overrightarrow{\Delta V_5}\right\|$ en utilisant l'échelle des vitesses.

Calculer la valeur de l'accélération $a_5 = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\Delta V_5}\right\|}{2\tau}$.

Utiliser l'échelle des accélérations pour déterminer la longueur du vecteur $\vec{a_5}$.

Tracer en M_5 , le vecteur $\vec{a_5}$ qui est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\Delta V_5}$.



4) le vecteur quantité de mouvement

Le vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un point matériel est égal au **produit** de sa **masse** m par son **vecteur vitesse**:

$$\vec{p} = m.\vec{v}$$

Le vecteur quantité de mouvement **dépend du référentiel**.
Il est colinéaire et de même sens que le vecteur vitesse.
Unité légale m (kg), v ($m.s^{-1}$), p ($kg.m.s^{-1}$)
Les caractéristiques du vecteur quantité de mouvement du point M sont:

$$\vec{p}(t)\begin{cases}\text{direction : celui du vecteur vitesse}\\ \text{sens : celui du mouvement}\\ \text{point d'application : le point M}\\ \text{une valeur } p = \|\vec{p}\| = m.v\end{cases}$$

II) Les mouvements rectilignes et circulaires

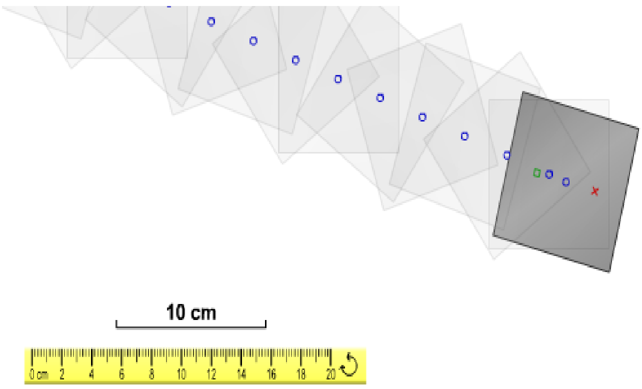
1) mouvement rectiligne

Animation table à coussin d'air

Au cours d'un mouvement rectiligne, la trajectoire d'un point M est une droite. Il existe 3 types de mouvements rectilignes:

a) mouvement rectiligne uniforme

Exemple: mouvement du centre d'inertie d'un palet sur un plan horizontal sans frottement



Dans un référentiel donné le mouvement d'un point M est **rectiligne uniforme** si en chaque instant son **vecteur vitesse** est **constant** :

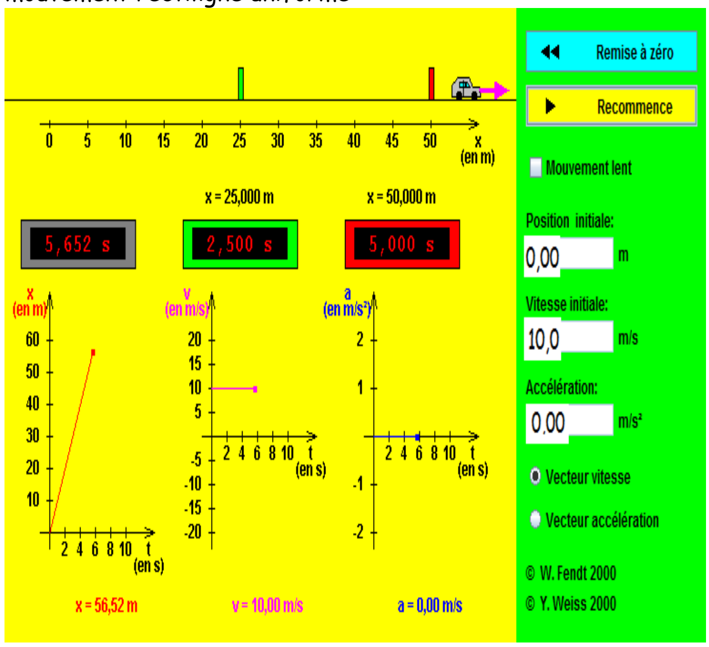
$\vec{v}$ = constante $\Leftrightarrow$ mouvement rectiligne uniforme Le vecteur accélération instantanée est égal au vecteur nul quelque soit t en effet:

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_t = \vec{0}$$

écrit d'une autre façon:

$$\vec{a_i} = \frac{\overrightarrow{v_{i+1}} - \overrightarrow{v_{i-1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\vec{v} - \vec{v}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \vec{O}$$

Animation donnant vitesse position et accélération en fonction du temps (mouvement rectiligne) par Walter Fendt. Allure des courbes x(t), v_x(t) et a_x(t) au cours d'un mouvement rectiligne uniforme



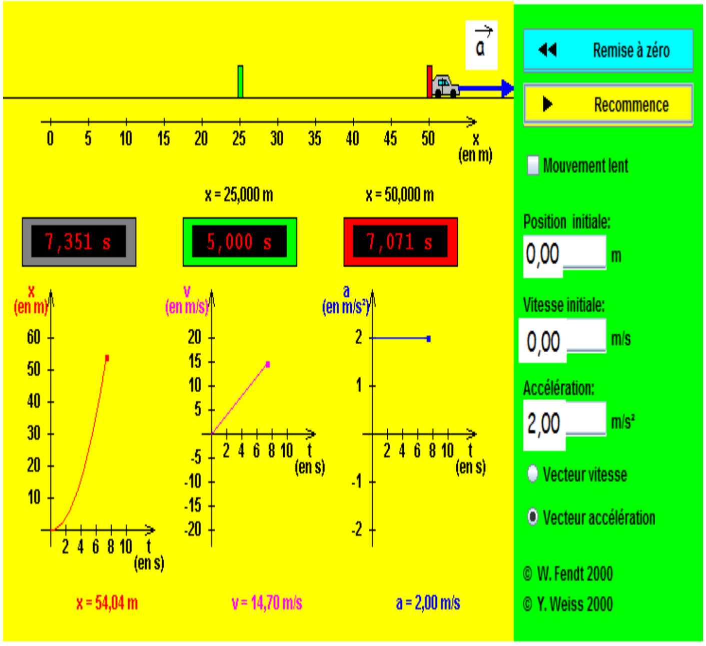
b) mouvement rectiligne uniformément accéléré

Dans un référentiel donné le mouvement d'un point M est **rectiligne uniformément accéléré** si en chaque instant son **vecteur accélération** est **constant** et que sa trajectoire est une droite:

$\vec{a}$ = constante, trajectoire une droite

$\Leftrightarrow$ mouvement rectiligne uniformément varié

Animation donnant vitesse position et accélération en fonction du temps (mouvement rectiligne) par Walter Fendt. Allure des courbes x(t), v_x(t) et a_x(t) au cours d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré.



c) mouvement rectiligne quelconque

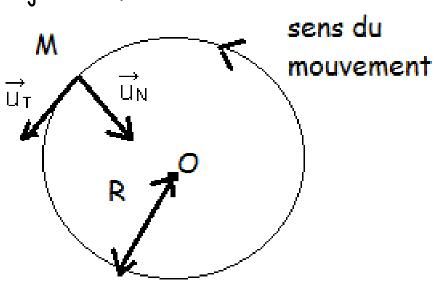
Dans un référentiel donné le mouvement d'un point M est **rectiligne quelconque** si en chaque instant son vecteur accélération et vitesse est quelconque et que sa **trajectoire** est une **droite**.

Animation: chute verticale avec frottement (f(t), v(t), a(t) (Gastebois)

2) mouvement circulaire

Dans le cas des mouvements circulaires on utilisera le **repère de Frénet** pour exprimer les vecteurs vitesse accélération et position. Ce repère est constituée d'un point P ou se trouve le mobile à l'instant t et de deux vecteurs orthonormés $\vec{u}_N$ (n de normale à la trajectoire) et $\vec{u}_T$ (T de tangent à la trajectoire)

Le vecteur unitaire $\vec{u}_T$ est tangent à la trajectoire, au point M où se trouve le mobile. Ce vecteur est orienté arbitrairement (pas nécessairement dans le sens du mouvement).Le vecteur unitaire $\vec{u}_N$ est normal à la trajectoire. Il est orienté vers l'intérieur de la courbe.



Dans ce cours on verra 2 types de mouvement circulaire.

a) mouvement circulaire uniforme

Dans un référentiel donné le mouvement d'un point M est **circulaire uniforme** si en chaque instant la valeur v de la **vitesse** est **constante** et que la **trajectoire** est une portion de **cercle** de rayon R. Le **vecteur accélération** est **centripète** (orienté vers le centre de la trajectoire). Les coordonnées des vecteurs accélération, vitesse et position sont, dans la base de Frénet:

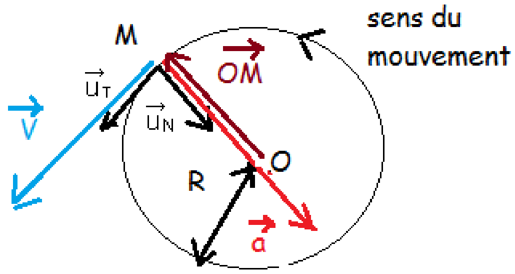
$$\overrightarrow{OM} = -R.\vec{u}_N$$

$$\vec{v} = v.\vec{u}_T$$

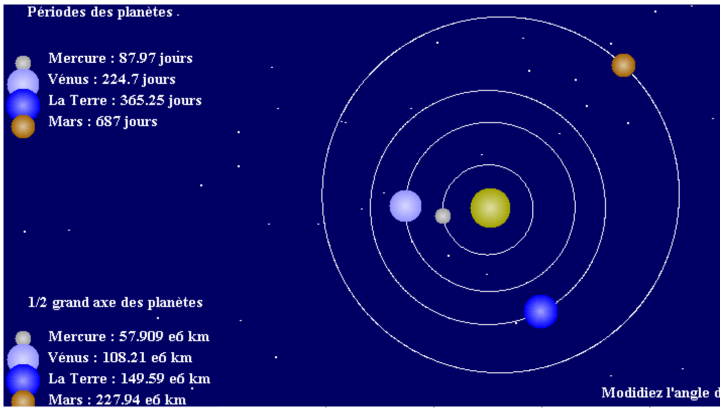
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_N.\vec{u}_N + a_T.\vec{u}_T = \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}.\vec{u}_T = \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N$$

$a_N = \dfrac{v^2}{R}$: valeur de l'accélération normale

$a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0$ (car v = constante): valeur de l'accélération tangentielle



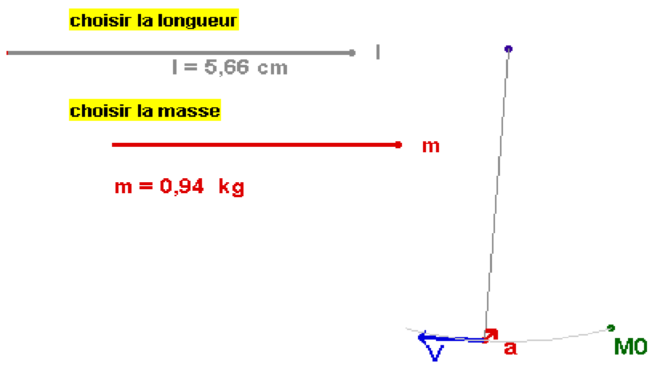
Exemple: le mouvement du centre d'inertie des planètes dans le référentiel héliocentrique. Animation: mouvement des planètes telluriques autour du soleil



b) mouvement circulaire non uniforme

Animation: le pendule simple sur différentes planètes (Wontu)

Animation: visualisation des vecteurs forces, vitesse et accélération dans le cas du pendule (université de Nantes)



Dans un référentiel donné le mouvement d'un point M est **circulaire non uniforme** si en chaque instant la valeur de sa **vitesse n'est pas constante** et que la **trajectoire** est une

portion de cercle de rayon R. En chaque instant les coordonnées des vecteurs accélération, vitesse et position sont dans le repère de Frénet:

$$\overrightarrow{OM} = -R.\vec{u}_N$$
$$\vec{v} = v.\vec{u}_T$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_n.\vec{u}_N + a_T.\vec{u}_T = \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}\vec{u}_T$$
$$a_n = \frac{v^2}{R} : \text{valeur de l'accélération normale}$$
$$a_T = \frac{dv}{dt} : \text{valeur de l'accélération tangentielle}$$

III) les 3 lois de Newton

Introduction les 3 lois suivantes ne sont vérifiées que dans un référentiel galiléen. Exemple de référentiel Galiléen:

- référentiel terrestre, lié à la surface de la Terre, (table, quai d'un train etc.) utilisé pour étudier les mouvements des solides au voisinage proche de la Terre

- référentiel géocentrique, lié au centre de la Terre, utilisé pour étudier les mouvements des satellites de la Terre ainsi que celui de la Lun

- référentiel héliocentrique, lié au centre de la Terre, pour étudier les mouvements des planètes autour du soleil.

1) première loi de Newton ou principe d'inertie

Animation: table à coussin d'air (Ostralo.net)

Lorsqu'un système matériel est **pseudo isolé** (soumis à des forces qui se compensent) ou **isolé** (soumis à aucune force) par rapport à un référentiel galiléen alors soit :

- il est au **repos**
- le mouvement de son centre d'inertie est **rectiligne uniforme**. Son vecteur vitesse est alors constant.

La réciproque est vraie.

$\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{O} \Leftrightarrow \vec{v}_G$ est constant

2) deuxième loi de Newton ou principe fondamentale de la dynamique

Dans un **référentiel galiléen**, la **somme vectorielle** des **forces extérieures** appliquée à un système matériel est **égale** à la **dérivée par rapport au temps** de sa **quantité de mouvement**:

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m.\vec{v})}{dt}$$

Dans le cas particulier ou le système conserve une masse constante, la seconde loi devient:

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m.\vec{v})}{dt} = m.\frac{d(.\vec{v})}{dt} = m.\vec{a}$$

Exemple: dans le cas d'une chute libre sans frottement, la seule force s'exerçant sur une masse constante est son poids. La seconde loi devient:

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{P} = m.\vec{g} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m.\vec{a}$$
$$\vec{g} = \vec{a}$$

L'accélération de l'objet vaut a = 9,8 $m.s^{-2}$=9,8 $N.kg^{-1}$. Une 1 seconde la vitesse du solide augmente de 9,8 $m.s^{-1}$.

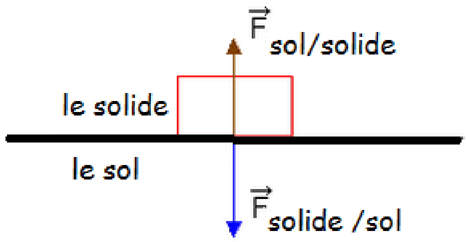
3) troisième loi de Newton ou principe des actions réciproques

Lorsqu'un système matériel A exerce une force $\vec{F}_{A/B}$ sur un système matériel B alors celui-ci exerce sur le système matériel A une **force opposée** $\vec{F}_{B/A}$. Ces 2 **vecteurs forces** sont **opposés** (même direction et norme mais sens opposé et points d'application différents):

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

Exemple: un solide exerce sur le sol une force de valeur $F_{solide\ /\ sol}$ alors le sol exerce sur le solide est force de valeur $F_{sol\ /\ solide}$ opposée tel que:

$$\vec{F}_{solide/sol} = -\vec{F}_{sol/solide}$$



4) application des lois de Newton à la propulsion

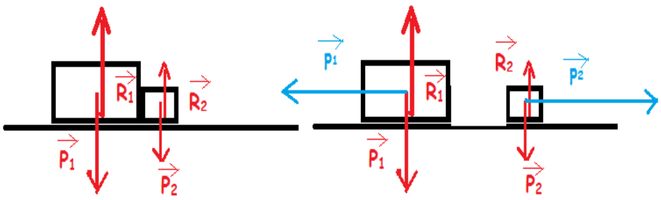
Remarque: Dans le cas ou le système garde une masse constante on dit que le système est fermé. Dans le cas contraire il s'agit d'un système ouvert. Une fusée éjecte des gaz, le système fusée est ouvert. Par contre le système {gaz,fusée} est fermé.

Considérons 2 palets reliés par un ressort. Il sont posés sur une table à coussin d'air qui annule les frottements. Le système {palet 1, palet 2) est soumis à des forces extérieures qui se compensent. La somme des forces qui s'exercent sur le système est nulle:

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{0}$$

A t = 0 la quantité de mouvement du système est nulle puisque le système est au repos $\vec{p}_i = \vec{0}$. A l'instant t+dt le ressort est brulé, le système se sépare en deux sous systèmes dont les vecteurs quantités de mouvement sont opposés en effet:

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{0} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}_i}{dt}$$
$$\vec{p}(t+dt) = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$



avant séparation des 2 sous systèmes $\vec{p_i} = \vec{0}$

après séparation des 2 sous systèmes $\vec{p_f} = \vec{0}$

Lorsqu'une fusée expulse du gaz, la quantité de mouvement du gaz est l'opposé à la quantité de mouvement de la fusée, ce qui explique le principe de la propulsion par réaction.

La conservation de la quantité de mouvement d'un système fermé permet d'expliquer la **propulsion par réaction.**

Programme officiel

Temps, mouvement et évolution

Notions et contenus	Compétences exigibles
Temps, cinématique et dynamique newtoniennes Description du mouvement d'un point au cours du temps : vecteurs position, vitesse et accélération	Extraire et exploiter des informations relatives à la mesure du temps pour justifier l'évolution de la définition de la seconde. Choisir un référentiel d'étude. Définir et reconnaître des mouvements (rectiligne uniforme, rectiligne uniformément varié, circulaire uniforme, circulaire non uniforme) et donner dans chaque cas les caractéristiques du vecteur accélération. Définir la quantité de mouvement d'un point matériel
Référentiel galiléen. Les 3 lois de Newton	Connaître et exploiter les trois lois de Newton ; les mettre en œuvre pour étudier des mouvements dans des champs de pesanteur et électrostatique uniformes. *Mettre en oeuvre une démarche expérimentale pour étudier un mouvement.*
Conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé.	*Mettre en oeuvre une démarche expérimentale pour interpréter un mode de propulsion par réaction à l'aide d'un bilan qualitatif de quantité de mouvement.*