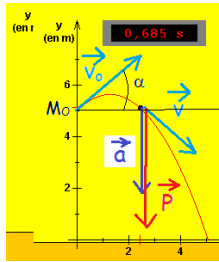


1) Quand peut-on dire qu'un champ de pesanteur est uniforme ?

2) A l'aide de la seconde loi de Newton déterminer l'expression du vecteur accélération au cours du mouvement d'un objet de masse m soumis à une unique force, son poids (mouvement dit de chute libre). Comment appelle-t-on ce mouvement ?



3) Conditions initiales, à $t = 0$ les vecteurs positions et vitesses ont pour coordonnées:

$$\overrightarrow{OM_0} \begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}; \quad \vec{v}_0 \begin{cases} v_{x0} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_{y0} = v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

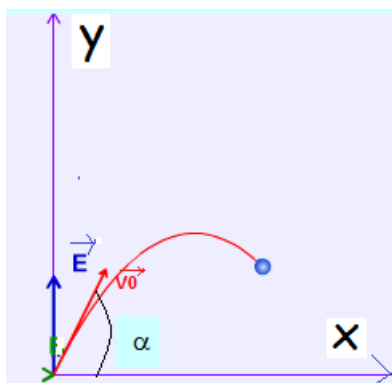
Déterminer les équations horaires du mouvement $a_x(t)$, $a_y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, $x(t)$ et $y(t)$ dans le cas d'un mouvement

uniformément accéléré dans un champ de pesanteur uniforme.

4) A partir des équations horaires de position déterminer l'équation de la trajectoire

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + x_0 \\ y = -\frac{g \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + y_0 \end{cases}$$

5) A l'aide de la seconde loi de Newton, déterminer la valeur de l'accélération d'une particule de masse M , supposée ponctuelle, de charge électrique q et de masse m , placée dans un champ électrostatique uniforme \vec{E} . On négligera toutes les forces sauf la force électrique. Quel est le nom de ce type de mouvement ?



6) Déterminer les équations horaires du mouvement d'une particule de masse M , supposée ponctuelle, de charge électrique q et de masse m , placée dans un champ électrostatique uniforme \vec{E}
($\vec{a} = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}$)

Conditions initiales, à $t = 0$ les vecteurs positions et vitesses ont pour coordonnées:

$$\overrightarrow{OM_0} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}; \quad \vec{v}_0 \begin{cases} v_{x0} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_{y0} = v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

7) Déterminer l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\vec{F}_{T/S}$ exercée par la Terre, de masse m_T , sur un satellite de masse m , en mouvement circulaire uniforme dans le référentiel géocentrique. Le satellite est situé à une altitude h , le rayon de la Terre est noté R_T . L'expression vectorielle sera exprimée dans la base de Frénet (\vec{u}_n, \vec{u}_T). Donner les unités de chacun des termes.

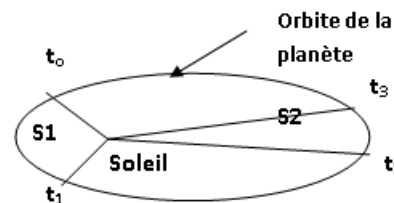
8) Déterminer l'expression du vecteur accélération du centre d'inertie d'un satellite de la Terre, dont la masse est notée m , dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

9) Sachant que le vecteur accélération d'un satellite de la Terre vaut : $\vec{a} = \frac{G \cdot m_T}{R^2} \cdot \vec{n}$ démontrer que, si le mouvement est circulaire, alors la vitesse est constante. Donner l'expression de la norme de la vitesse.

10) Déterminer l'expression de la période de révolution T d'un satellite de la Terre connaissant sa vitesse

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{R}} \quad (R : \text{rayon de l'orbite et } m_T, \text{ masse de la Terre.})$$

11) Enoncer les 3 lois de Kepler.



1) Quand peut-on dire qu'un champ de pesanteur est uniforme ?

Un champ de pesanteur est uniforme si en chaque point de l'espace le vecteur champ de pesanteur \vec{g} est constant.

C'est le cas dans un cube d'environ 1 km d'arrête au voisinage de la Terre.

2) A l'aide de la seconde loi de Newton déterminer l'expression du vecteur accélération au cours du mouvement d'un objet de masse m soumis à une unique force, son poids.

Comment appelle-t-on ce mouvement ?

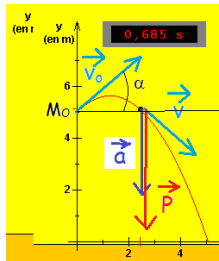
$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La masse ne variant pas au cours du mouvement on peut la sortir de la dérivée:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d(\vec{v})}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Le vecteur accélération est constant, le mouvement est uniformément accéléré.



3) Conditions initiales, à $t = 0$ les vecteurs positions et vitesses ont pour coordonnées:

$$\vec{OM}_0 \begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases}; \vec{v}_0 \begin{cases} v_{x0} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_{y0} = v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

Déterminer les équations horaires du mouvement $a_x(t)$, $a_y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, $x(t)$ et $y(t)$ dans le cas d'un mouvement

uniformément accéléré dans un champ de pesanteur uniforme.

Détermination des équations horaires des coordonnées du vecteur accélération.

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = g \\ a_y = g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g_y = -g = -9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{cases}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = C_1 = \text{constante}$$

$$-g = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y = -g \cdot t + C_2 (\text{constante})$$

les constantes C_1 et C_2 sont déterminées avec les conditions initiales:

$$v_x = C_1 = v_x(0) = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_y(0) = -g \cdot 0 + C_2 (\text{constante}) = v_0 \cdot \sin \alpha$$

$$C_2 = v_0 \cdot \sin \alpha$$

Les coordonnées du vecteur vitesse sont:

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha$$

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + C_3$$

$$y = \frac{-g \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + C_4$$

les constantes C_3 et C_4 sont déterminées avec les conditions initiales:

$$x(0) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot 0 + C_3 = x_0 \Rightarrow C_3 = x_0$$

$$y(0) = -\frac{g \cdot 0^2}{2} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot 0 + C_4 = y_0 \Rightarrow C_4 = y_0$$

Les coordonnées du vecteur position sont:

$$\vec{OM} \begin{cases} x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + x_0 \\ y = -\frac{g \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + y_0 \end{cases}$$

4) A partir des équations horaires de positions déterminer l'équation de la trajectoire

$$\vec{OM} \begin{cases} x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + x_0 \\ y = -\frac{g \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + y_0 \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire est la relation qui lie l'ordonnée à l'abscisse du point M: $y = f(x)$. Pour la déterminer on

utilise les équations horaires de la trajectoire, $x(t)$ et $y(t)$.

On exprime l'instant t en fonction de x dans la première équation et on réinjecte sa valeur dans la seconde.

$$\vec{OM} \begin{cases} x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + x_0 \\ y = -\frac{g \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + y_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right) \\ y = -\frac{g \cdot \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^2}{2} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right) + y_0 \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire est:

$$y = -\frac{g \cdot \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^2}{2} + \tan \alpha \cdot (x - x_0) + y_0$$

5) A l'aide de la seconde loi de Newton, déterminer la valeur de l'accélération d'une particule de masse M , supposée ponctuelle, de charge électrique q et de masse m , placée dans un champ électrostatique uniforme \vec{E} . On négligera toutes les forces sauf la force électrique. Quel est le nom de ce type de mouvement ?

Dans le référentiel galiléen la seconde loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique s'écrit:

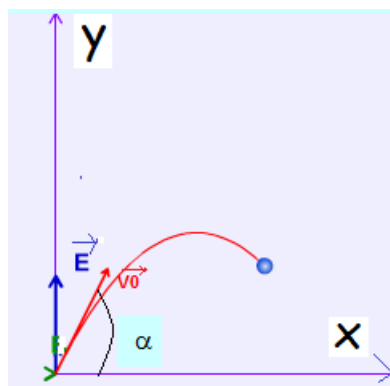
$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La masse ne variant pas au cours du mouvement on peut la sortir de la dérivée:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = q \cdot \vec{E} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d(\vec{v})}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}$$

Le vecteur accélération est constant, le mouvement est uniformément accéléré.



6) Déterminer les équations horaires du mouvement d'une particule de masse M , supposée ponctuelle, de charge électrique q et de masse m , placée dans un champ

électrostatique uniforme \vec{E} ($\vec{a} = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}$)

Conditions initiales, à $t = 0$ les vecteurs positions et vitesses ont pour coordonnées:

$$\begin{matrix} \vec{OM}_0 \\ \vec{v}_0 \end{matrix} \begin{matrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{matrix} ; \begin{matrix} v_{x_0} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_{y_0} = v_0 \cdot \sin \alpha \end{matrix}$$

Equations horaires des coordonnées du vecteur accélération.

$$\vec{a} \begin{matrix} a_x \\ a_y \end{matrix} = \frac{q}{m} \cdot \vec{E} \begin{matrix} E_x = 0 \\ E_y = E \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_x = 0 \\ a_y = \frac{q \cdot E_y}{m} = \frac{q \cdot E}{m} \end{matrix}$$

Equations horaires des coordonnées du vecteur vitesse.

$$\begin{matrix} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{q \cdot E}{m} \end{matrix}$$

a_x est la dérivée de v_x par rapport au temps, v_x est la primitive de a_x par rapport au temps. Idem pour a_y et v_y .

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = C_1 = \text{constante}$$

$$\frac{q \cdot E}{m} = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y = \frac{q \cdot E}{m} \cdot t + C_2(\text{constante})$$

les constantes C_1 et C_2 sont déterminées avec les conditions initiales:

$$v_x = C_1 = v_x(0) = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_y(0) = v_y = \frac{q \cdot E}{m} \cdot 0 + C_2(\text{constante}) = v_0 \cdot \sin \alpha$$

$$C_2 = v_0 \cdot \sin \alpha$$

Les coordonnées du vecteur vitesse sont:

$$\vec{v} \begin{matrix} v_x = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y = \frac{q \cdot E}{m} \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{matrix}$$

Détermination des équations horaires des coordonnées du vecteur position.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{q \cdot E}{m} \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha$$

v_x est la dérivée de x par rapport au temps, x est la primitive de v_x par rapport au temps. Idem pour v_y et y .

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + C_3$$

$$y = \frac{q \cdot E \cdot t^2}{2 \cdot m} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + C_4$$

les constantes C_3 et C_4 sont déterminées avec les conditions initiales:

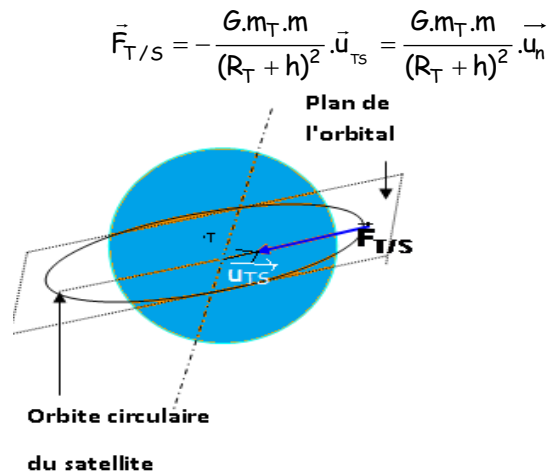
$$x(0) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot 0 + C_3 = x_0 = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$y(0) = \frac{q \cdot E \cdot 0^2}{2 \cdot m} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot 0 + C_4 = y_0 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

Les coordonnées du vecteur position sont:

$$\vec{OM} \begin{matrix} x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \\ y = \frac{q \cdot E \cdot t^2}{2 \cdot m} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t \end{matrix}$$

7) Déterminer l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\vec{F}_{T/S}$ exercée par la Terre, de masse m_T , sur un satellite de masse m , en mouvement circulaire uniforme dans le référentiel géocentrique. Le satellite est situé à une altitude h , le rayon de la Terre est noté R_T . L'expression vectorielle sera exprimée dans la base de Frénet (\vec{u}_n, \vec{u}_τ). Donner les unités de chacun des termes.



G : constante de gravitation universelle, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$.

Unité légale: $m(\text{kg}), m_T(\text{kg}), h(\text{m}), R_T(\text{m}), F_{T/S}(\text{N})$

Le vecteur unitaire $\vec{u}_{TS} = -\vec{n}$ (vecteurs opposés car normes égales à 1, même direction mais sens opposé).

8) Déterminer l'expression du vecteur accélération du centre d'inertie d'un satellite de la Terre, dont la masse est notée m , dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_{T/S} = -\frac{G \cdot m_T \cdot m}{R^2} \cdot \vec{u}_{TS} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt}$$

$$\vec{F}_{T/S} = m \cdot \frac{d(\vec{v})}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

$$m \cdot \vec{a} = -\frac{G \cdot m_T \cdot m}{R^2} \cdot \vec{u}_{TS}$$

$$\vec{a} = -\frac{G \cdot m_T}{R^2} \cdot \vec{u}_{TS}$$

$$\text{or } \vec{u}_{TS} = -\vec{n}$$

$$\vec{a} = \frac{G \cdot m_T}{R^2} \cdot \vec{n}$$

9) Sachant que le vecteur accélération d'un satellite de la Terre vaut : $\vec{a} = \frac{G \cdot m_T}{R^2} \cdot \vec{n}$ démontre que si le mouvement est

circulaire alors la vitesse est constante. Donner l'expression de la norme de la vitesse.

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$: constante de gravitation universelle
 $M_S = 1,96 \cdot 10^{30} \text{kg}$: masse du soleil.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_N \cdot \vec{n} + a_T \cdot \vec{t} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t}$$

$a_n = \frac{v^2}{R}$: valeur de l'accélération normale

$a_T = \frac{dv}{dt}$: valeur de l'accélération tangentielle

or $\vec{a} = \frac{G \cdot m_T}{R^2} \cdot \vec{n}$ donc :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t} = \frac{G \cdot m_T}{R^2} \cdot \vec{n}$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{G \cdot m_T}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{R}}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{constante}$$

10) Déterminer l'expression de la période de révolution T d'un satellite de la Terre connaissant sa vitesse

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{R}} \quad (R : \text{rayon de l'orbite et } m_T, \text{ masse de la Terre.})$$

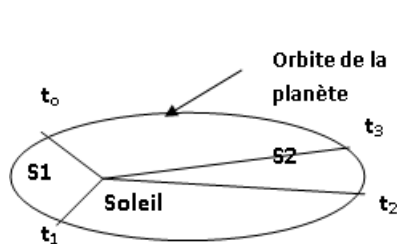
La période de révolution du satellite autour de la Terre est la durée mise par le satellite pour faire un tour autour de la Terre. Elle est égale à la circonférence de l'orbite divisée par la vitesse du satellite :

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} \text{ or } v = \sqrt{\frac{G \cdot m_T}{R}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{\sqrt{\frac{G \cdot m_T}{R}}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot R \sqrt{\frac{R}{G \cdot m_T}}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{G \cdot m_T}}$$

unité: T(s); R(m), $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $m_T(\text{kg})$



11) Énoncer les 3 lois de Kepler.
 Première loi de Kepler : toutes les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des

foyers.

Seconde loi de Kepler : pendant des intervalles de temps Δt égaux la planète balaye des surfaces 'S' égales de l'ellipse.
 Si $\Delta t = t_1 - t_0 = t_3 - t_2$ alors $S1 = S2$

Troisième loi de Kepler ou loi des périodes : Soit T la période de révolution de la planète autour du soleil, et 'a' la longueur du demi-grand axe de l'ellipse. La période de révolution au carré divisée par le demi-grand axe 'a' au cube est une constante. La période T ne dépend pas de la planète mais uniquement de la masse M_S du soleil et de la constante d'attraction universelle G :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_S}$$