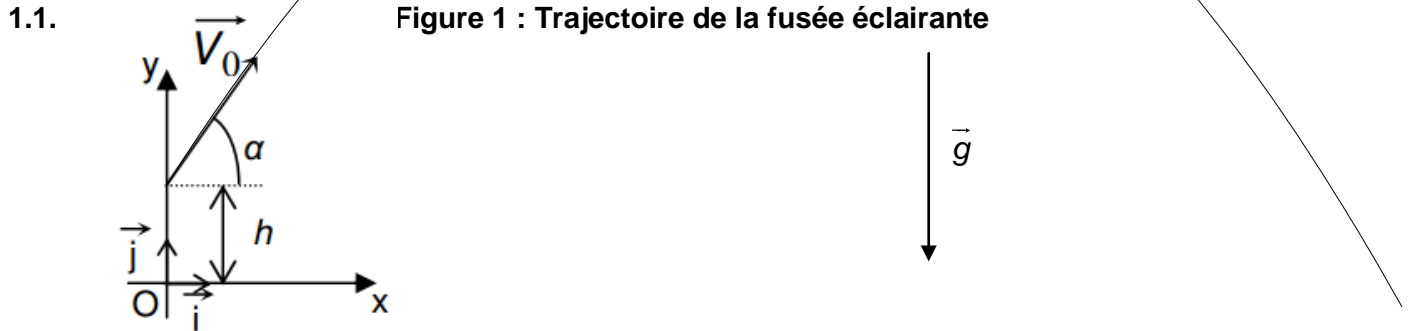


1. Durée de visibilité de la fusée

/5 points



1.2. Dans le référentiel terrestre considéré galiléen, on peut appliquer la **deuxième loi de Newton** au système {fusée éclairante} pour déterminer les coordonnées du vecteur accélération. En effet, cette loi stipule que dans un référentiel galiléen, **la somme des forces extérieures appliquées au système (ici la fusée éclairante) est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement.**

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m_f \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{dm_f}{dt} \cdot \vec{v} + m_f \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

On néglige la variation de masse de la fusée pendant son mouvement donc $\frac{dm_f}{dt} = 0$ et la deuxième loi de

$$\text{Newton devient : } \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m_f \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m_f \cdot \vec{a} \quad \text{(0,5)}$$

On néglige toutes les actions dues à l'air (frottement, poussée d'Archimède), alors la fusée est en chute libre, soumise uniquement à la force poids \vec{P} .

$$\text{Ainsi } \vec{P} = m_f \cdot \vec{a}.$$

$$m_f \cdot \vec{g} = m_f \cdot \vec{a}$$

$$\vec{g} = \vec{a}$$

Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on obtient $\vec{a} \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases}$

1.3. Comme $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, on a $\vec{a} \begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{cases}$

En primitivant, on obtient $\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = -g \cdot t + C_2 \end{cases}$ où C_1 et C_2 sont des constantes liées aux conditions initiales.

À la date $t = 0$ s, on $\vec{v} = \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$.

On en déduit $\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y(t) = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad \text{(1)}$

Comme $\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \end{cases}$, on a $\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$

En primitivant, on obtient $\overline{OG} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + C_3 \\ y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + C_4 \end{cases}$ où C_3 et C_4 sont des constantes liées aux conditions initiales.

À la date $t = 0$ s, la fusée éclairante est située à la sortie du pistolet à une altitude h donc $\overline{OG} \begin{cases} 0 \\ h \end{cases}$.

On en déduit $\overline{OG} \begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + h \end{cases}$ conformément aux équations horaires proposées. **(1)**

1.4. Pour déterminer la valeur de la durée du vol de la fusée éclairante, on cherche la date t_{vol} pour laquelle la fusée touche le sol, ainsi $y(t_{vol}) = 0$.

Il faut résoudre l'équation du second degré : $-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{vol}^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t_{vol} + h = 0$ et ne retenir que la solution positive.

$$t_{vol} = \frac{-v_0 \cdot \sin \alpha - \sqrt{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2 - 4 \times \left(-\frac{g}{2}\right) \cdot h}}{-g} = \frac{-v_0 \cdot \sin \alpha - \sqrt{(v_0 \cdot \sin \alpha)^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{-g}$$

$$t_{vol} = \frac{-50 \times \sin 55 - \sqrt{(50 \times \sin 55)^2 + 2 \times 9,8 \times 1,8}}{-9,8} = 8,4 \text{ s}$$

Ou par résolution numérique :

$$-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{vol}^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t_{vol} + h = 0$$

$$-0,5 \times 9,8 \cdot t_{vol}^2 + 50 \times (\sin 55) \cdot t_{vol} + 1,8 = 0$$

$$-4,9 \cdot t_{vol}^2 + 40,96 \cdot t_{vol} + 1,8 = 0$$

Calcul du discriminant : $\Delta = (50 \times \sin 55)^2 - 4 \times (-4,9) \times 1,8 = 1712,81$

$$t_{vol} = \frac{-50 \times \sin 55 - \sqrt{1712,81}}{-2 \times 4,9} = 8,4 \text{ s}$$

1.5. (1) On a $y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + h$.

On sait que la fusée commence à éclairer au bout d'une seconde.

Pour connaître l'altitude à partir de laquelle la fusée commence à éclairer, calculons $y(t = 1 \text{ s})$.

$$y(t = 1 \text{ s}) = -\frac{1}{2} \cdot g + v_0 \cdot \sin \alpha + h = -\frac{1}{2} \times 9,8 + 50 \times \sin 55 + 1,8 = 38 \text{ m} = 4 \times 10^1 \text{ m}$$

avec 1 seul chiffre significatif.

On cherche l'altitude à laquelle la fusée cesse d'éclairer. **(0,25)**

La fusée éclaire ensuite de façon intense pendant 6 secondes, elle atteint alors l'altitude $y(t = 6 + 1)$.

$$y(t = 7 \text{ s}) = -\frac{1}{2} \times 9,8 \times 7^2 + 50 \times \sin 55 \times 7 + 1,8 = 48 \text{ m} = 5 \times 10^1 \text{ m}$$

avec un seul chiffre significatif. **(0,5)**

On a trouvé que la fusée éclairait entre 38 et 48 m d'altitude. La fusée étant très haute elle éclaire une large zone, ce qui semble adapté au but recherché.

2. Etude du recul du pistolet /2 points

2.1. $\vec{p}_0 = (m_p + m_f) \cdot \vec{v}$

Avant que la fusée ne quitte le pistolet, on a $\vec{v} = \vec{0}$ donc $\vec{p}_0 = \vec{0}$.

2.2. Éjection de la fusée

2.2.1. La quantité de mouvement d'un système isolé se conserve : $\vec{p} = \overline{Cte}$.

2.2.2. Juste après l'éjection de la fusée, la quantité de mouvement du système a pour expression :

$$\vec{p} = m_p \cdot \vec{v}_p + m_f \cdot \vec{v}_0$$

Comme $\vec{p} = \overline{Cte}$ alors $\vec{0} = m_p \cdot \vec{v}_p + m_f \cdot \vec{v}_0$

$$\vec{v}_p = -\frac{m_f}{m_p} \cdot \vec{v}_0$$

2.2.3. Le soldat tient fermement le pistolet lors du tir, ainsi il exerce une force sur le système ce qui réduit la vitesse de recul du pistolet. D'autre part, le système subit des forces de frottement non prises en compte.