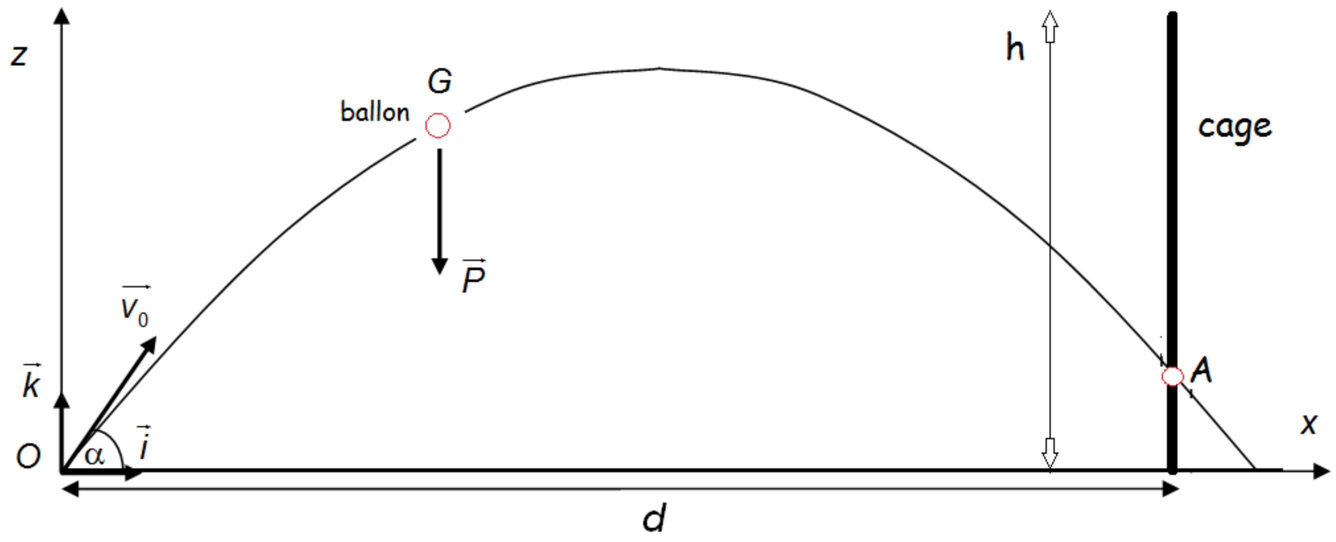
Ex 2 (corrigé)

1.1.



1.2. $x_A = d$; $z_A < h = 2{,}44$ m

2.1. Seconde loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique :

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquée à un système matériel est égale à la dérivée par rapport au temps de sa quantité de mouvement: $\Sigma \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m.\vec{v})}{dt}$

Dans ce cas particulier ou le système conserve une masse constante, la seconde loi devient:

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m.\vec{v})}{dt} = m.\frac{d(.\vec{v})}{dt} = m.\vec{a}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a}$$

$$.\vec{g} = \vec{a} \Rightarrow -g.\vec{j} = a_x.\vec{i} + a_z.\vec{j}$$

Par conséquent les coordonnées du vecteur accélération du centre d'inertie du ballon sont :

a_x = O et a_y = -g.

2.2. $\vec{v}_o = v_o.\cos\alpha.\vec{i} + v_o.\sin\alpha.\vec{k}$; Les équations horaires de la vitesse égales aux primitives des équations horaires des coordonnées de l'accélération

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = k_1 \\ v_y = -g.t + k_2 \end{cases}$$

Les constantes k_1 et k_2 sont déterminées grâce aux conditions initiales de la vitesse (t = 0 s)

$v_x(0) = v_o.\cos\alpha = k_1$

$v_z(0) = v_o.\sin\alpha = -g.0 + k_2$

$k_1 = v_o.\cos\alpha$

$k_2 = v_o.\sin\alpha$

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_o.\cos\alpha \\ v_z = -g.t + v_o.\sin\alpha \end{cases}$$

2.3 Les équations horaires x(t) et z(t) sont les primitives des fonctions $v_x(t)$ et $v_z(t)$

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_o.\cos\alpha \\ v_z = -g.t + v_o.\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_o.\cos\alpha.t + k_3 \\ z = -\frac{g}{2}.t^2 + v_o.\sin\alpha.t + k_4 \end{cases}$$

Les constantes k_3 et k_4 sont déterminées grâce aux conditions initiales de la vitesse (t = 0 s) : : x_o = 0 m ; z_o = 0 m

$$\begin{cases} x(0) = 0 = v_o.\cos\alpha.0 + k_3 \Rightarrow k_3 = 0 \\ z = -\frac{g}{2}.t^2 + v_o.\sin\alpha.t + k_4 \Rightarrow k_4 = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_o.\cos\alpha.t \\ z = -\dfrac{g}{2}.t^2 + v_o.\sin\alpha.t \end{cases}$$

2.4 Pour trouver l'équation de la trajectoire on élimine le temps t dans les équations horaires :

$x = v_0.\cos\alpha.t \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}$ on reporte ensuite cette valeur dans l'équation horaire $y = f(t)$:

$$z = -\frac{1}{2}.g.(\frac{x}{v_0.\cos\alpha})^2 + v_0.(\sin\alpha).(\frac{x}{v_0.\cos\alpha})$$

$$z = -\frac{1}{2}.g.(\frac{x}{v_0.\cos\alpha})^2 + \tan\alpha.x$$

2.5. On calcule z_A

$$z_A = -\frac{1}{2}.g.(\frac{x_A}{v_0.\cos\alpha})^2 + \tan\alpha.x_A$$

$$z_A = -0{,}5\times 9{,}81\times(\frac{11}{11{,}5\times\cos(55)})^2 + \tan(55).11$$

$$z_A = 2{,}1\,\text{m} < 2{,}44\text{m}$$

Penalty réussi

3. Étude énergétique du mouvement du ballon

On admet que le ballon passe au niveau de la ligne de but à une hauteur $z_A = h_A$.

3.1. $E_c = \frac{1}{2}.m.V^2$; $E_{pp} = m.g.(z-z_O) = m.g.z$; $E_m = E_c + E_{pp}$

Courbe 3 : énergie potentielle de pesanteur car pour x = 0 , z = 0 donc $E_{pp} = m.g.z = 0$

Courbe 2 énergie cinétique car au cours de la montée la balle a sa vitesse qui diminue donc Ec diminue également

Courbe 1 : l'énergie mécanique qui est la somme des 2 autres énergies.

3.2. D'après la courbe E_m = constante en effet $\Delta E_m = W(\overrightarrow{F_{nc}}) = 0$ car il n'y a pas de frottement.

3.3 A partir des courbes, déterminer la vitesse V_C du ballon au point C d'abscisse x_C = 4 m.

D'après la courbe :

$$Ec(C) = 17J = \frac{1}{2}.m.V_c^2$$

$$V_C = \sqrt{\frac{2.E_{c(C)}}{m}} = \sqrt{\frac{2x17}{0{,}620}} = 7{,}4m.s^{-1}$$

3.4 $E_{pp}(C) = m.g.z_C$ donc $z_c = E_{pp}(C)/(m.g) = 24/(9{,}81\times 0{,}620) = 3{,}9$ m

3.5

$$E_m(C) = E_m(O)$$

$$\frac{1}{2}.m.V_C^2 + m.g.z_C = \frac{1}{2}.m.V_O^2$$

$$V_C = \sqrt{V_0^2 - 2.g.z_C} = \sqrt{11{,}5^2 - 2\times 9{,}81\times 3{,}9}$$

$$V_C \approx 7{,}4\,m.s^{-1}$$